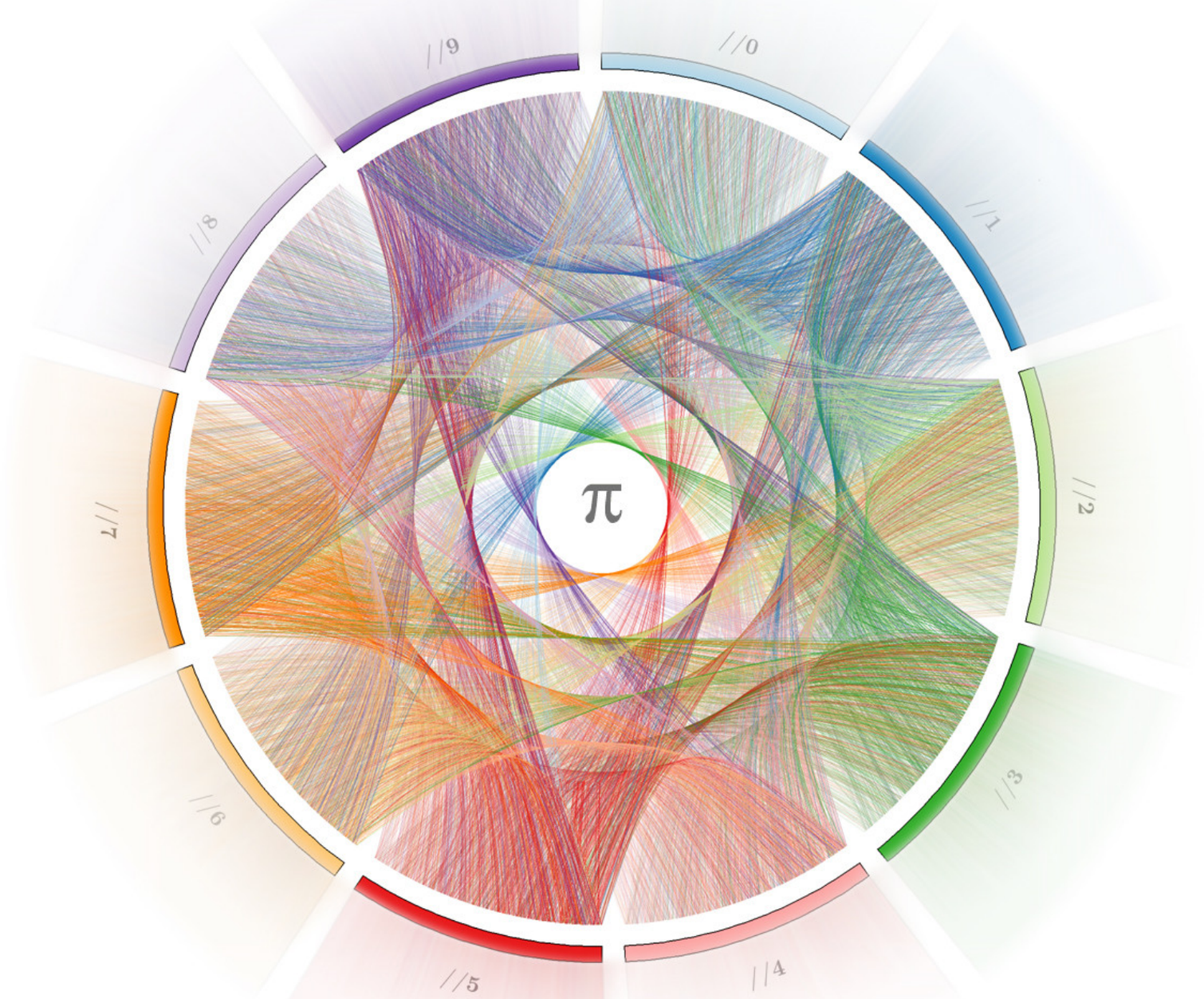
Représentation des réels et caractères



GIF-1001 Ordinateurs : Structure et Applications, H2018

Jean-François Lalonde

Source image

Rappel: système décimal

Décortiquons 6 431,986…

Position	3	2	1	0	,	-1	-2	-3
Valeur	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Symbole	6	4	3	1	,	9	8	6
=	6000	400	30	1		0,9	0,08	6

Nombres rationnels

- Une possibilité (16 bits):
  - mettons la virgule au milieu:

Valeur	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
Position	b_{15}	b_{14}	b_{13}	b_{12}	b_{11}	b_{10}	b_9	b_8	,	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

    - 8 premiers bits: 2^0 à 2^7 (0 à 255)
    - 8 derniers bits: 2^{-1} à 2^{-8} (1/256 à 255/256, 0.00390625 à 0.99609375)

- Problèmes?
  - très limité!
    - quelle est la valeur maximale?
      - 255
    - quelle est la précision (ou la plus petite différence entre deux nombres)?
      - 1/256

Nombres rationnels, en décimal

- Rappelons-nous la notation scientifique (en décimal)
  - 6500 = (+) 6,5x10^3, ou 6,5E3
- Composantes:
  - signe (+): indique si le nombre est positif ou négatif
  - base (10): décimale
  - exposant (3): indique l'ordre de grandeur
  - significande (6,5): détermine la précision de la valeur représentée
    - caractéristique (6)
    - mantisse (0,5)

Nombres rationnels, en binaire

- La norme IEEE 754 a été adoptée universellement (2008) pour les fractions sur 32, 64, et 128 bits

- Très similaire à la notation scientifique:

$$(\text{signe})\ 1,\text{mantisse} \times 2^{(\text{exposant}-127)}$$

- Par exemple, sur 32 bits (simple précision):
  - signe: un bit
  - base: 2, donc binaire. Comme cette base est toujours 2, on n'a pas besoin de la stocker (c'est implicite)
  - exposant (décalé): 8 bits (donc de 0 à 255), mais on soustrait 127, donc de -127 à +128

1 bit	8 bits	23 bits
signe	exposant	mantisse

IEEE754 vers décimal

Convertir 0x40D00000 (écrit en IEEE754) en décimal

- Tout d'abord, convertissons en binaire

4		0		D		0		0		0		0		0	
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Séparons la chaîne de bits en sections correspondants aux champs de l'IEEE754 (signe, exposant, mantisse)

0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Analysons chaque champ indépendamment
  - Bit de signe: 0 donc positif (+)
  - Exposant: 0b10000001 = 129. 129 - 127 = 2.
  - Mantisse: 0b1010 000… $2^{-1} + 2^{-3} = 0,5 + 0,125 = 0,625$
- Résultat:
  - (+) 1,625 x $2^2 = 6,5$

(signe) 1,mantisse x $2^{(exposant-127)}$

1 bit	8 bits	23 bits
signe	exposant	mantisse

Exercice #1: IEEE754 vers décimal

Convertir 0x411A0000 (écrit en IEEE754) en décimal.

(signe) 1,mantisse x $2^{(exposant-127)}$

1 bit	8 bits	23 bits
signe	exposant	mantisse

Ex. 1, étape 1: hexadécimal vers binaire

Convertir 0x411A0000 (écrit en IEEE754) en décimal.

4	1	1	A	0	0	0	0

0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Hexadécimal	Binaire
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Ex. 1, étape 2: binaire vers décimal

Convertir 0x411A0000 (écrit en IEEE754) en décimal.

0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Bit de signe = 0, donc nombre positif

(+) 1,mantisse x $2^{(exposant-127)}$

- Exposant = 0b10000010 = 130. 130-127 = 3

(+) 1,mantisse x 2^{3}

- Mantisse = 0b0011010…
  - = $1x2^{-3} + 1x2^{-4} + 1x2^{-6} = 0,125 + 0,0625 + 0,015625 = 0,203125$

(+) 1,203125 x 2^{3} = 9,625

(signe) 1,mantisse x $2^{(exposant-127)}$

1 bit	8 bits	23 bits
signe	exposant	mantisse

Décimal vers IEEE754

Convertir -16,125 en hexadécimal (IEEE754)

- Exprimons le nombre avec des puissances de 2

$16 = 2^4$ $0,125 = 2^{-3}$

- Convertissons en binaire

$-10000,001_b$

- Décalons la virgule vers la gauche

$-10000,001_b = -1,0000001_b \times 2^4$

- Identifions chacun des champs du format IEEE754
  - Signe - : bit à 1

1																											

  - Exposant: exposant - 127 = 4. 4+127 = 131 = 10000011_b

1	1	0	0	0	0	0	1	1																			

  - Mantisse: $00000010\ldots_b$

1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Décimal vers IEEE754 (suite)

Convertir -16,125 en hexadécimal (IEEE754)

1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Regroupons les bits par groupes de 4

1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Convertissons en hexadécimal

C	1	8	1	0	0	0	0

- Résultat: 0xC1810000

Exercice #2: décimal vers IEEE754

Convertir 12,5 en binaire sur 32 bits avec IEEE 754.

Écrire la réponse en hexadécimal.

(signe) 1,mantisse x $2^{(exposant-127)}$

1 bit	8 bits	23 bits
signe	exposant	mantisse

Ex. 2, étape 1: décimal vers binaire (IEEE754)

Convertir 12,5 en binaire sur 32 bits avec IEEE 754

- 12,5 est positif, donc bit de signe = 0

0																												

- 12,5 = 0b1100,1 = 1,1001 x 2^3

- nous voulons que exposant - 127 = 3, alors exposant = 130
  soit 0b10000010

0	1	0	0	0	0	0	1	0																				

- la mantisse est 1001000…

0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(signe) 1,mantisse x $2^{(exposant-127)}$

1 bit	8 bits	23 bits
signe	exposant	mantisse

Ex. 2, étape 2: binaire vers hexadécimal

Écrire votre réponse en hexadécimal

0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4				1				4				8				0				0				0				0			

Hexadécimal	Binaire
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

donc, 0x41480000

Considérations

- Intervalle: 1.2E-38 to 3.4E+38
  - Plus que 4G valeurs mais seulement 32 bits?
  - 126765060022822940149670320537 6 Oui
  - 126765060022822940149670320537 7 Non

- $(2^{60}-2^{60})+1$ donne 0+1 = 1 car la soustraction se fait exactement;

- $(2^{60}+1)-2^{60}$ donne 0, car, avec une précision limitée à 53 bits, $2^{60}+1$ s'arrondit à 2^{60}.

- Même fonctionnement pour les autres tailles de nombres à virgule flottante mais avec plus de bits

Cas spéciaux IEEE754

- Exposant et mantisse à 0:
  - 0x00000000
  - Le nombre est zéro (+0 ou -0)
- Exposant à 255 et mantisse à 0
  - 0x7F800000 ou 0xFF800000
  - $+\infty$ ou $-\infty$
- Exposant à 255 et mantisse différente de 0
  - ex: 0xFFC00000
  - Pas un nombre («not a number», ou NaN)
  - Exemples: log(-1), 0/0.

Outil pratique

http://www.binaryconvert.com

PHIR™ #4

- A priori, nous ne pouvons pas savoir ce qu'une chaîne binaire signifie.
  - Ex: que veut dire 0x416C6C6F (sur 32 bits)?
  - La bonne réponse est: ça dépend!

entier non-signé	1097624687
entier signé	1097624687
rationnel	14,47764

- Il nous *faut* donc savoir quel format utiliser pour bien interpréter les données

Chaînes de caractères — ASCII

- **A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange
- Table reliant un caractère d'imprimerie à une valeur de 0x00 à 0x7F
  - donc nécessite 7 bits dans sa version originale

Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL (null)	32	20	040		Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SOH (start of heading)	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	STX (start of text)	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	ETX (end of text)	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EOT (end of transmission)	36	24	044	$	$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	ENQ (enquiry)	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	ACK (acknowledge)	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	BEL (bell)	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	BS (backspace)	40	28	050	(	(	72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	TAB (horizontal tab)	41	29	051	)	)	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LF (NL line feed, new line)	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VT (vertical tab)	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FF (NP form feed, new page)	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR (carriage return)	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SO (shift out)	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SI (shift in)	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE (data link escape)	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1 (device control 1)	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2 (device control 2)	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3 (device control 3)	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4 (device control 4)	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAK (negative acknowledge)	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	SYN (synchronous idle)	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	ETB (end of trans. block)	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	CAN (cancel)	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EM (end of medium)	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	SUB (substitute)	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	ESC (escape)	59	3B	073	;	;	91	5B	133	[	[	123	7B	173	{	{
28	1C	034	FS (file separator)	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174			|
29	1D	035	GS (group separator)	61	3D	075	=	=	93	5D	135	]	]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RS (record separator)	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	US (unit separator)	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177	&#127;	DEL

Source: www.LookupTables.com

http://www.asciitable.com

Chaînes de caractères — ASCII

- Exemple: «Bonjour!» (sans les « ») en ASCII?
  - attention aux majuscules…
- Bonjour! = 0x42 6F 6E 6A 6F 75 72 21

Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL (null)	32	20	040		Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SOH (start of heading)	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	STX (start of text)	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	ETX (end of text)	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EOT (end of transmission)	36	24	044	$	$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	ENQ (enquiry)	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	ACK (acknowledge)	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	BEL (bell)	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	BS (backspace)	40	28	050	(	(	72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	TAB (horizontal tab)	41	29	051	)	)	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LF (NL line feed, new line)	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VT (vertical tab)	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FF (NP form feed, new page)	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR (carriage return)	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SO (shift out)	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SI (shift in)	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE (data link escape)	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1 (device control 1)	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2 (device control 2)	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3 (device control 3)	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4 (device control 4)	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAK (negative acknowledge)	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	SYN (synchronous idle)	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	ETB (end of trans. block)	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	CAN (cancel)	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EM (end of medium)	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	SUB (substitute)	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	ESC (escape)	59	3B	073	;	;	91	5B	133	[	[	123	7B	173	{	{
28	1C	034	FS (file separator)	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174			|
29	1D	035	GS (group separator)	61	3D	075	=	=	93	5D	135	]	]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RS (record separator)	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	US (unit separator)	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177	&#127;	DEL

Source: www.LookupTables.com

http://www.asciitable.com

ASCII: 7 ou 8 bits?

Quelle est la différence entre
écrire la chaîne de caractères «ABC» sur **7 bits**
et l'écrire sur **8 bits**?

Retour sur l'ASCII

Quelle est la différence entre
écrire la chaîne de caractères «ABC» sur **7 bits**
et l'écrire sur **8 bits**?

- Sur 7 bits:
  - « A »: 0x41 = 0b1000001
  - « B »: 0x42 = 0b1000010
  - « C »: 0x43 = 0b1000011
- Placer tous les bits un à la suite de l'autre:
  - 0b100000110000101000011
- Convertir ensuite en hexadécimal en regroupant par groupe de 4:
  - 0b 1 0000 0110 0001 0100 0011
  - 0x 1 0 6 1 4 3
- donc, 0x106143.

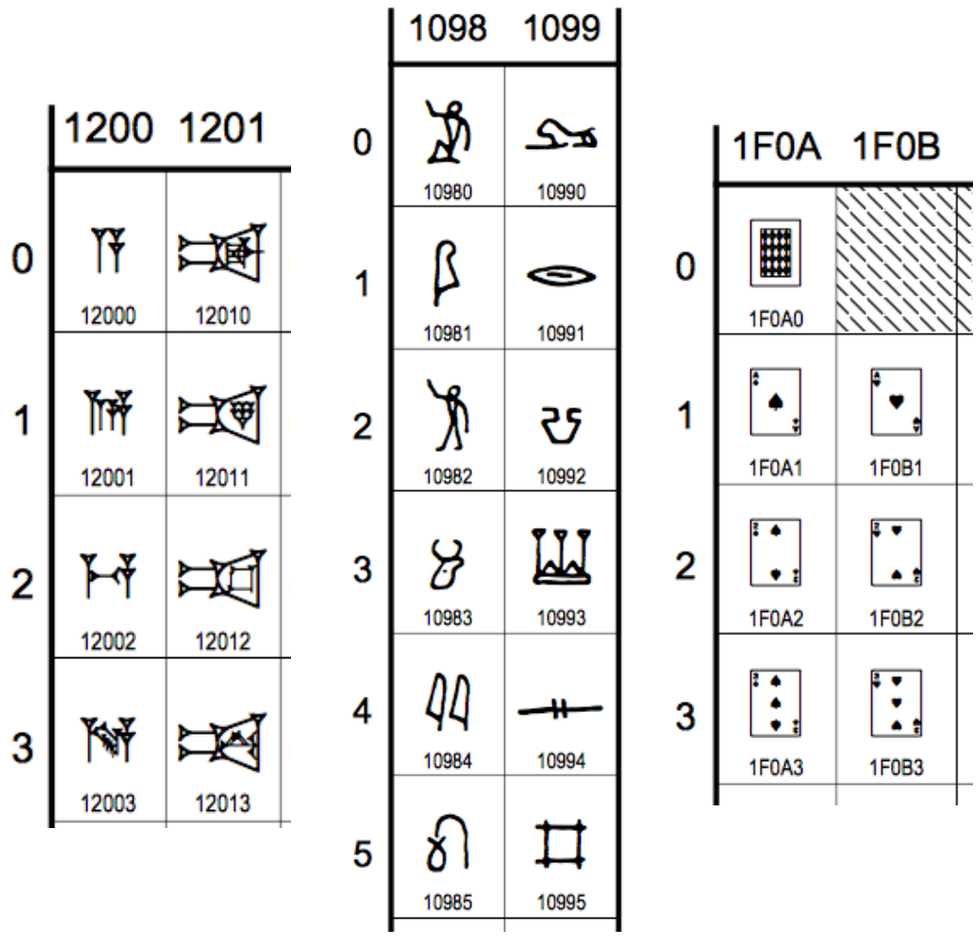
Retour sur l'ASCII

Quelle est la différence entre
écrire la chaîne de caractères «ABC» sur **7 bits**
et l'écrire sur **8 bits**?

- Sur 8 bits
  - « A »: 0x41 = 0b01000001
  - « B »: 0x42 = 0b01000010
  - « C »: 0x43 = 0b01000011
- Placer tous les bits un à la suite de l'autre:
  - 0b010000010100001001000011
- Convertir ensuite en hexadécimal en regroupant par groupe de 4:
  - 0b 0100 0001 0100 0010 0100 0011
  - 0x 4 1 4 2 4 3
- donc, 0x414243.

Chaînes de caractères — Unicode

- ASCII ne suffit pas à représenter tous les caractères
- Standard visant à attribuer un numéro distinct à chaque caractère
- Couvre même
  - l'écriture cunéiforme
  - hiéroglyphes
  - cartes à jouer



UTF-8 (Unicode Transformation Format — 8 bits)

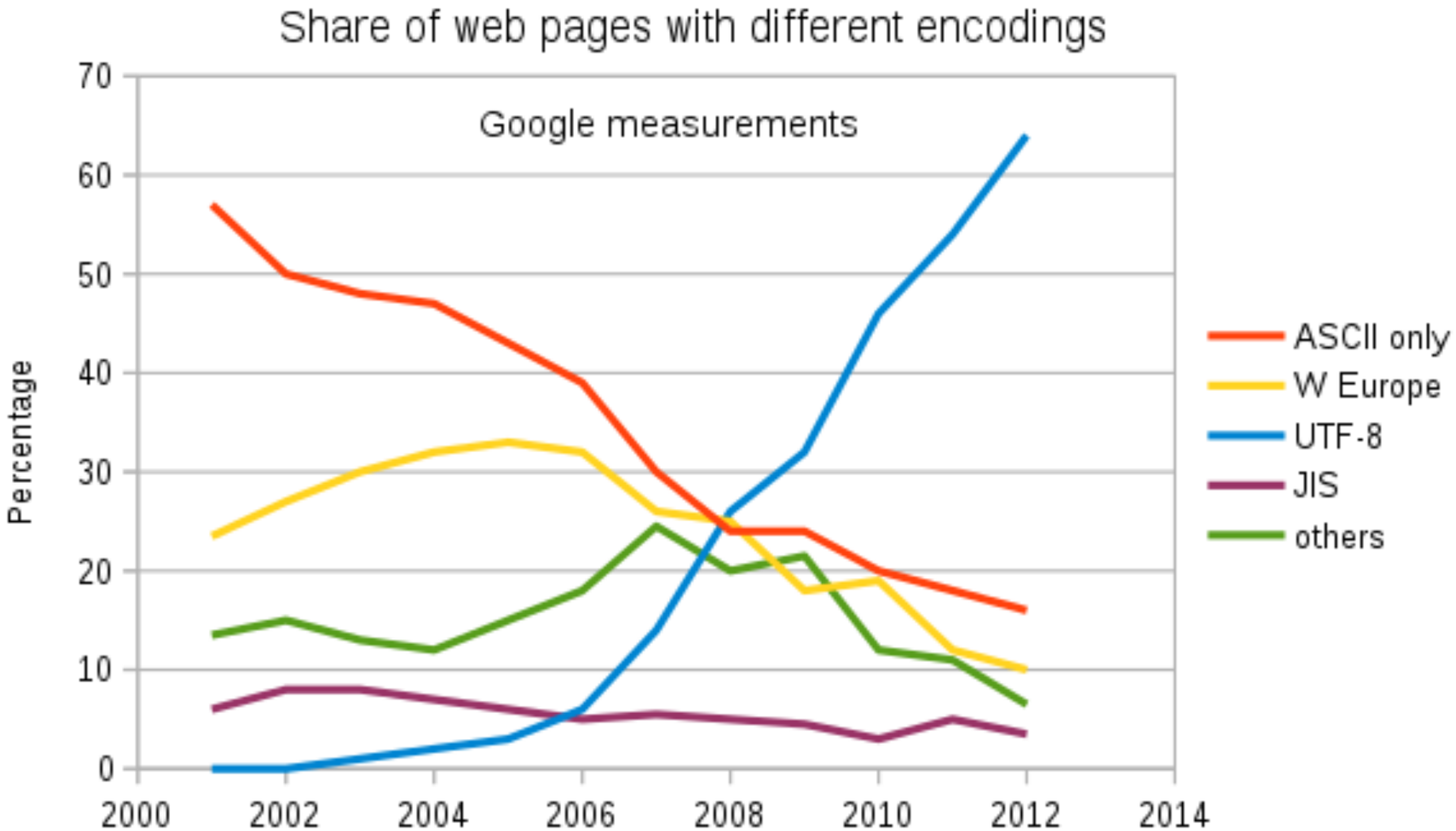
- Système de préfixe par groupes de 8 bits (1 octet)
  - Si premier bit (MSB) est 0, alors 1 seul octet
  - Sinon:

Rétrocompatibilité avec ASCII

Définition du nombre d'octets utilisés dans le codage (uniquement les séquences valides)

Caractères codés	Représentation binaire UTF-8	Premier octet valide (hexadécimal)	Signification
U+0000 à U+007F	0xxxxxxx	00 à 7F	1 octet codant 1 à 7 bits
U+0080 à U+07FF	110xxxxx 10xxxxxx	C2 à DF	2 octets codant 8 à 11 bits
U+0800 à U+0FFF	11100000 101xxxxx 10xxxxxx	E0 (le 2e octet est restreint de A0 à BF)	3 octets codant 12 à 16 bits
U+1000 à U+1FFF	11100001 10xxxxxx 10xxxxxx	E1	
U+2000 à U+3FFF	1110001x 10xxxxxx 10xxxxxx	E2 à E3	
U+4000 à U+7FFF	111001xx 10xxxxxx 10xxxxxx	E4 à E7	
U+8000 à U+BFFF	111010xx 10xxxxxx 10xxxxxx	E8 à EB	
U+C000 à U+CFFF	11101100 10xxxxxx 10xxxxxx	EC	
U+D000 à U+D7FF	11101101 100xxxxx 10xxxxxx	ED (le 2e octet est restreint de 80 à 9F)	
U+E000 à U+FFFF	1110111x 10xxxxxx 10xxxxxx	EE à EF	
U+10000 à U+1FFFF	11110000 1001xxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	F0 (le 2e octet est restreint de 90 à BF)	4 octets codant 17 à 21 bits
U+20000 à U+3FFFF	11110000 101xxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx		
U+40000 à U+7FFFF	11110001 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	F1	
U+80000 à U+FFFFF	1111001x 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	F2 à F3	
U+100000 à U+10FFFF	11110100 1000xxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	F4 (le 2e octet est restreint de 80 à 8F)	

Popularité



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/UTF-8

PHIR™ #4

- A priori, nous ne pouvons pas savoir ce qu'une chaîne binaire signifie.
  - Ex: que veut dire 0x416C6C6F (sur 32 bits)?
  - La bonne réponse est: ça dépend!

entier non-signé	1097624687
entier signé	1097624687
rationnel	14.47764
caractères ASCII	Allo

- Il nous *faut* donc savoir quel format (quelle «recette») utiliser pour bien interpréter les données

En résumé: 4 PHIRs™

Raccourci	Explication
tout en binaire	Dans un ordinateur, tout, absolument tout, est stocké en format binaire.
# de bits prédéterminé	On utilise un nombre fini et pré-déterminé de bits pour représenter de l'information.
hexadécimal = binaire	L'hexadécimal est une façon plus compacte de représenter du binaire.
besoin d'une recette	À priori, nous ne pouvons savoir ce qu'une chaîne binaire signifie, il nous faut une «recette».